Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 38, 1986

UN AUXILIAR PARA TOMAR DECISIONES CON DATOS INCIERTOS. LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS DIFUSOS

por *Arturo J. Bignoli*

Llamamos variable literaria a una mignitud incierta, en general no mensurable. Por ejemplo: "belleza de una mujer", "dulzura de un postre", "bondad de un hombre", "robustez de una estructura", etc.

Las variables literarias pueden ser calificadas con una escala de valores de x entre cero y uno. Tal ocurriría si adoptamos la escala siguiente $x=0$ (muy pequeño); $x=0.2$ (pequeño); $x=0.4$ y $x=0.6$ (medio); $x=0.8$ (grande); $x=1$ (muy grande). Podrían suponerse escalas diferentes.

Decimos que si la "robustez de una estructura" es *grande* la calificamos con $x=0.8$. Sin embargo no siempre tenemos una idea clara de la calificación que debe aplicarse y podemos admitir varias calificaciones *posibles* con diferente *sustento* μ_i, variable entre cero y uno. Diremos entonces que la "robustez de la estructura" R puede merecer, a nuestro juicio, la calificación $x=0.4$ con sustento $\mu=0.2$ o $x=0.6$ con $\mu=0.9$ o $x=1$ con $\mu=0.4$. El *sustento* μ es el grado de aceptación y de verosimilitud de cada calificación.

Lo antedicho podemos expresarlo mediante un CONJUNTO DIFUSO, que en general escribimos:

$$D = \mu_0|o+\mu_1|0.1+\ldots+\mu_n|1$$

$$D = \sum_{i=o}^{1} \mu_i|x_i$$

Las barras son simplemente divisorias y las sumas deben interpretarse como uniones: o. En el ejemplo anterior escribimos:

$$D_R = 0.2|0.4 + 0.4|0.6 + 0.9|0.8 + 0.4|1$$

No es necesario escribir las calificaciones con $\mu = o$

Decimos que el conjunto difuso es el "VALOR", difuso por supuesto, de una variable literaria. En general nuestra experiencia o intuición nos permitirán escribir conjuntos difusos que expresen los valores de algunas variables literarias, pero no de otras que resultan de éstas. La teoría de los conjuntos difusos permite, a partir de C.D. conocidos, obtener mediante operaciones lógicas muy simples los C.D. correspondientes a variables literarias resultantes de las anteriores. Indicamos brevemente estas operaciones lógicas.

Intersección

$$A(x) \cap B(x) = \sum_{i} \text{men}\,(\mu Ax; \mu Bx)\,|x$$

Se interpreta como y.

Unión

$$A(x) \cup B(x) = \sum \text{may}\,(\mu Ax; \mu Bx)\,|x$$

se interpretan como *o*

Relaciones difusas

Son el producto cartesiano de dos conjuntos difusos

$$Rx;y = Ax \times By = \sum_{i;j} \text{men}\,(\mu Ax_i; \mu By_j)\,|x_i; y_j$$

Su resultado es una matriz de valores, pues cada x_i debe ser comparado con todos los y_j

Ley difusa

Si dos variables literarias pueden tomar diferentes "valores" y entre ellos es posible establecer una relación difusa, llamamos "ley difusa" a la unión:

$$Lx;y = R_1x;y\, U R_2x;y\, U R_3x;y \ldots$$

La ley difusa equivale en matemática corriente a conocer la función que liga dos variables:

$$f\,(x;y) = 0$$

La situación equivalente a la de un par de valores x_2 y_2 que no satisfacen la función, tiene su expresión en matemática difusa por el hecho que las relaciones difusas calculadas no respondan a *relaciones condicionales.*

Estas últimas se establecen por experiencia, con sano criterio. Entre dos variables difusas x_1 y x_2 calificables como "pequeñas", "medianas" o "grandes", se dará por ejemplo:

x_1 grande	$\rightarrow$	x_2 pequeña	(G x P)
x_1 media	$\rightarrow$	x_2 media	(M x M)
x_1 pequeña	$\rightarrow$	x_2 grande	(P x G)

Esto excluye las relaciones: (G x G); (P x P); (M x P); (P x M); (M x G); (G x M)
En las matrices que expresan las leyes difusas aparecen los μ correspondientes a cada par de valores x_{1i} x_{2j}.

En el caso de variables que solo tuviesen valores $\mu = 1$ ó $\mu = 0$ la ley difusa se reduciría a la función no difusa

$$f(x_1;x_2) = 0$$

Composición difusa

Dado un "valor" difuso A'x se puede obtener el correspondiente B'y mediante la ley difusa $L_{x,y}$ realizando la operación:

$$B'y = A'x \circ Lx;y = \sum_{x} \max_{y} [\text{men} (\mu A'x; \mu Lx;y)] | y$$

que equivale en matemática común al caso en que dado un valor $x = x_1$, con la función $f(x;y) = 0$ obtener $y = f(x)$.
También puede hacerse una composición entre dos relaciones difusas o entre dos leyes difusas Lx;y Ly;z

$$Lx;z = Lx;y \circ Lyz$$

Equivale en matemática común a obtener f (x;z) a partir de f (x;y) y f (y;z).

Ejemplo

Supongamos querer estimar la *aceptación* (a) de un producto, en función de su *presentación* (p). Sea (p) (variable literaria) dependiente de

x_1: calidad del producto
x_2: precio de venta del mismo
x_3: publicidad para la venta

} todas variables literarias

Establecemos las "relaciones condicionales" entre (p) y (a):

"p" bueno	(B)	corresponde	"a"	(B)
"p" medio	(M)	,,	"a"	(M)
"p" pobre	(P)	,,	"a"	(P)

Resultan las tres relaciones difusas:

$$R_1 = B \times B; \; R_2 = M \times M; \; R_3 = P \times P$$

y la ley difusa:

$$Lp,a = R_1 U R_2 U R_3$$

Adoptamos los "valores":

$D_B = 0.1|0.3+0.2|0.4+0.4|0.5+0.6|0.6+0.8|0.7+0.9|0.8+1|0.9+1|1$
$D_M = 0.1|0.3+0.6|0.4+1|0.5+0.6|0.6+0.1|0.7$
$D_P = 1|0+0.9|0.1+0.8|0.2+0.5|0.3+0.3|0.4+0.1|0.5$

Conviene aclarar que x_2 precio de venta tendrá "valores":

B si es bajo
M „ „ medio
P „ „ elevado

Con los "valores" anteriores pueden obtenerse en la forma explicada las relaciones difusas

	a \ p	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$R_2 = M \times M =$	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	0.4	0.1	0.6	0.6	0.6	0.1
	0.5	0.1	0.6	1.0	0.6	0.1
	0.6	0.1	0.6	0.6	0.6	0.1
	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

	a \ p	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$R_1 = B \times B =$	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	0.4	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	0.5	0.1	0.2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	0.6	0.1	0.2	0.4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
	0.7	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8	0.8	0.8
	0.8	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.9	0.9
	0.9	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	1.0
	1.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	1.0

	a \ p	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$R_3 = P \times P =$	0	1	0.9	0.8	0.5	0.3	0.1
	0.1	0.9	0.9	0.8	0.5	0.3	0.1
	0.2	0.8	0.8	0.8	0.5	0.3	0.1
	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.3	0.1
	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.1
	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

La ley difusa $Lp.a = R_1 U R_2 U R_3$ es:

$a \setminus p$		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	0	1	0.9	0.8	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0	0
	0.1	0.9	0.9	0.8	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0	0
	0.2	0.8	0.8	0.8	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0	0
	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.6	0.6	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2
Lp,a =	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.6	1	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4
	0.6	0	0	0	0.1	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
	0.7	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8	0.8	0.8
	0.8	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.9	0.9
	0.9	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1	1
	1.0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1	1

Los "valores" de "p" resultarán de los atribuidos a las x_i (i=1...3) Así, por ejemplo, para x_1 calidad *buena* x_2 precio *bueno* = bajo B y publicidad x_3B resultará $p = x_1 \cap x_2 \cap x_3$

μx	x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
x_1 (B)		0	0	0	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
x_2 (B)		0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
x_3 (B)		0	0	0	0	0	0	0.1	0.5	0.7	0.9	1.0
$\underset{i=1...3}{\Omega} = p_I =$		0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.5	0.7	0.9	1.0

Mediante la composición difusa: $p_I \circ Lp,a = a$ obtenemos un "valor" difuso de la aceptación:

$$a = 0.1|0 + 0.1|0 + 0.1|0.1 + 0.1|0.2 + 0.1|0.3 + 0.2|0.4 + 0.4|0.5 + 0.6|0.6 + + 0,8|0.7 + 0.9|0.8 \underline{+ 1|0.9 + 1|1}$$

La aceptación es B, como era de esperar.

La unión de las tres variables (x_1 o x_2 o x_3) da:

$$\underset{i=1...3}{U} = p_{II} = 0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.5 \quad 0.7 \quad 0.9 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 1.0 \quad 1.0$$

$$p_{II}\, Lpa = a = 0.5|0 + 0.5|01 + 0.5|0.2 + 0.5|0.3 + 0.6|0.4 + \underline{0.9|0.5} + + 0.6|0.6 + 0.8|0.7 + 0.9|0.8 \underline{+ 1|0.9 + 1|1}$$

Si tenemos calidad x_1 P (pobre) y x_3 (B) o
x_2 (B) precio bajo, será:

$\mu x \setminus x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(P) x_1	1	0.9	0.6	0.4	0.2	0.1	0	0	0	0	0
(B) x_3	0	0	0	0	0	0	0.1	0.5	0.7	0.9	1
$x_1 \cap x_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(B) x_2	0	0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.0
p_{III} $(x_1 \cap x_3) U x_2$	0	0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.0

$p_{III} \circ Lp;a = a = 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad \underline{0.9 \quad 1.0 \quad 1.0}$

La aceptación es buena, es decir que la calidad baja se compensa con precio bajo (bueno). Si tomáramos $(x_1 \cap x_3) \circ Lpa = \phi$, es decir que con calidad baja y publicidad buena la aceptación resultaría nula, requiriéndose para mejorarla un precio bueno. Si fuera x_1 (P) (calidad baja) y x_2 (B) (precio bajo) se tendrá:

μx \ x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(P) x_1	1	0.9	0.6	0.4	0.2	0.1	0	0	0	0	0
(B) x_2	0	0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	1.0
$x_1 \cap x_2$	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0
$a = (x_1 \cap x_2) Lpa =$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.6	1	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4

Aceptación *media.*

Si además pudiera ser x_3 (B) (public. buena)

(B) x_3	0	0	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
$(x_1 \cap x_2) U x_3 =$	0	0	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
$a = (x_1 \cap x_2) U x_3 \circ Lpa =$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	0.6	0.8	0.9	1.0	1.0

la aceptación sería *alta.* La publicidad mejora la aceptación si el precio es bajo, aunque la calidad sea baja.

Si fuera x_1 (B) y x_2 (P) y x_3 (B), o sea calidad alta, precio alto y publicidad buena se tendría:

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(B) x_1	0	0	0	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
(P) x_2	1	1	0,9	0,8	0.7	0.5	0.3	0.1	0	0	0
(B) x_3	0	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
$x_1 \cap x_2 \cap x_3$	0	0	0	0	0	0.1	0.3	0.1	0	0	0
$x_1 \cap x_2 \cap x_3 \circ Lpa$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Aceptación *media-alta.*

Con calidad alta y precio alto (sin public.)

$x_1 \cap x_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Como $x_1 \cap x \equiv x_1 \cap x_2 \cap_3$ la aceptación será la misma que en el caso anterior, es decir que la buena publicidad no influye.

Si en cambio fuera x_1 (B) y x_2 (P) y x_3 (P).

Es el caso anterior pero con x_3 (P) (publicidad pobre o mala)

x / μx	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(B) x_1	0	0	0	0	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
(P) x_2	1	1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.3	0.1	0	0	0
(P) x_3	1	0.9	0.8	0.7	0.5	0.3	0.1	0	0	0	0
$x_1 \cap x_2 \cap x_3$	0	0	0	0	0.5	0.1	0.1	0	0	0	0
$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \circ \text{Lpa}$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5	0.5	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2

La mala publicidad empeora algo la aceptación que resulta francamente *media*. Podrían multiplicarse los ejemplos.